

STICHTING  
**MATHEMATISCH CENTRUM**

2e BOERHAAVESTRAAT 49  
**AMSTERDAM**

**AFDELING TOEGEPASTE WISKUNDE**

Korte mededeling no. TN 21

**Bessel functies**

door

**H. A. Lauwerier**

**Februari 1962**

In deze notitie geven we een aantal bekende en minder bekende eigenschappen van de Bessel functies  $H_\nu^{(1)}(z)$  en  $H_\nu^{(2)}(z)$  en van hun varianten. De genoemde functies zijn oplossingen van

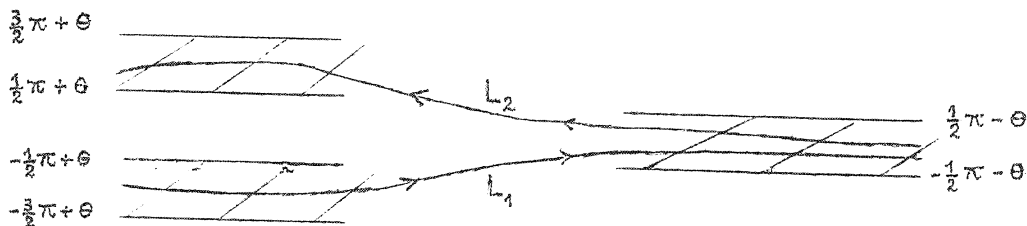
$$(1) \quad \frac{d^2 f}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{df}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) f = 0 .$$

Oplossingen van (1) kunnen worden voorgesteld als

$$(2) \quad f = \frac{1}{\pi i} \int_L e^{-z \operatorname{sh} w + \nu w} dw ,$$

waarbij  $L$  een of andere weg is. Verificatie dat (2) aan (1) voldoet is eenvoudig.

Stellen we  $z = x + iy = re^{i\theta}$  en  $w = u + iv$  dan beschouwen we i.h.b. de volgende wegen



waarbij dus  $u$  van  $-\infty$  tot  $+\infty$  loopt.

Convergentie van (2) vereist:

1 voor  $u \rightarrow +\infty$  ,  $\cos(v + \theta) > 0$ , dus bijv.

$$-\frac{1}{2}\pi - \theta < v < \frac{1}{2}\pi - \theta ;$$

2 voor  $u \rightarrow -\infty$  ,  $\cos(v - \theta) < 0$ , dus bijv.

$$-\frac{3}{2}\pi + \theta < v < -\frac{1}{2}\pi + \theta \quad \text{of} \quad \frac{1}{2}\pi + \theta < v < \frac{3}{2}\pi + \theta .$$

Beperken we ons tot reële  $\nu$  en positief reële  $z$  ( $=r$ ) dan zijn blijkbaar de door (2) bepaalde oplossingen met de in de figuur aangegeven wegen toegevoegd complex. We definiëren algemeen voor  $j=1,2$

$$(3) \quad H_{\nu}^{(j)}(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{L_j} e^{-zshw + \nu w} dw.$$

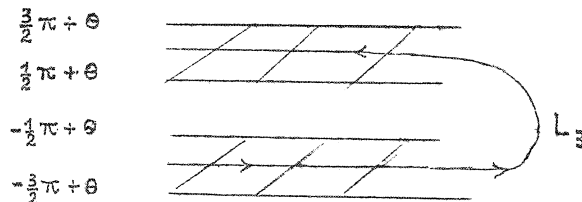
De genoemde functies heten de Hankel functies. Ze zijn enigszins te vergelijken met de functies  $e^{iz}$  en  $e^{-iz}$ . In de praktijk werkt men doorgaans met de Bessel functies  $J_{\nu}(z)$  en  $Y_{\nu}(z)$  welke a.v.\* met de Hankel functies samenhangen

$$(4) \quad \begin{cases} H_{\nu}^{(1)}(z) = J_{\nu}(z) + i Y_{\nu}(z) \\ H_{\nu}^{(2)}(z) = J_{\nu}(z) - i Y_{\nu}(z) \end{cases}.$$

Aldus kunnen we  $J_{\nu}(z)$  met  $\cos z$  en  $Y_{\nu}(z)$  met  $\sin z$  vergelijken.

Uit (3) volgt algemeen

$$(5) \quad J_{\nu}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_3} e^{-zshw + \nu w} dw$$



Uit (3) volgt

$$(6) \quad \begin{cases} H_{-\nu}^{(1)}(z) = e^{+i\nu\pi} H_{\nu}^{(1)}(z) \\ H_{-\nu}^{(2)}(z) = e^{-i\nu\pi} H_{\nu}^{(2)}(z) \end{cases}.$$

Uit (4) en (6) volgt

$$(7) \quad \begin{cases} 2i \sin \nu\pi H_{\nu}^{(1)}(z) = -e^{-i\nu\pi} J_{\nu}(z) + J_{-\nu}(z) \\ 2i \sin \nu\pi H_{\nu}^{(2)}(z) = e^{i\nu\pi} J_{\nu}(z) - J_{-\nu}(z) \end{cases}.$$

en

$$(8) \quad \sin \nu \pi Y_\nu(z) = \cos \nu \pi J_\nu(z) - J_{-\nu}(z) \quad .$$

Uit (5) kan men vrij gemakkelijk de volgende reeksontwikkeling afleiden

$$(9) \quad J_\nu(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! (j+\nu)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2j}$$

De ontwikkelingen van  $H_\nu^{(1)}(z)$ ,  $H_\nu^{(2)}(z)$ ,  $Y_\nu(z)$  volgen m.b.v. (7) en (8). Voor gehele waarden van  $\nu$  moet daarbij een limietovergang uitgevoerd worden.

Voor  $\nu=0$  is in het bijzonder

$$(10) \quad Y_0(z) = \frac{2}{\pi} \left\{ \ln \frac{z}{2} \cdot J_0(z) - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \psi(j+1)}{j! j!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2j} \right\} ,$$

waarbij  $\psi(j+1) = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{j}$ ,  $\gamma = 0.5772 \dots$ .

Dus

$$(11) \quad \begin{cases} J_0(z) = 1 - \frac{z^2}{4} + \frac{z^4}{64} - \dots \\ Y_0(z) = \frac{2}{\pi} (\ln \frac{z}{2} + \gamma) + O(z^2 \ln z) \end{cases} .$$

Voor  $\nu=1$  geldt

$$(12) \quad \begin{cases} J_1(z) = -J'_0(z) = \frac{z}{2} - \frac{z^3}{16} + \dots \\ Y_1(z) = -Y'_0(z) = -\frac{2}{\pi z} + O(z \ln z) \end{cases} .$$

Het asymptotisch gedrag van de Hankel functies (3) voor  $z \rightarrow \infty$  is bepaald door de zadelpunten  $\pm \frac{1}{2} \pi i$ .

De zadelpuntsmethode levert voor  $z \rightarrow \infty$ ,  $|\arg z| < \pi$

$$(13) \quad \begin{cases} H_\nu^{(1)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp i(z - \frac{1}{2} \nu \pi - \frac{1}{4} \pi) \\ H_\nu^{(2)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp -i(z - \frac{1}{2} \nu \pi - \frac{1}{4} \pi) \end{cases} .$$

Uit (4) en (13) volgt dan

$$(14) \quad \begin{cases} J_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos(z - \frac{1}{2} \nu \pi - \frac{1}{4} \pi) \\ Y_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin(z - \frac{1}{2} \nu \pi - \frac{1}{4} \pi) \end{cases} .$$

Volledigheidshalve vermelden we de volgende formules

$$(15) \quad J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z, \quad Y_{\frac{1}{2}}(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z$$

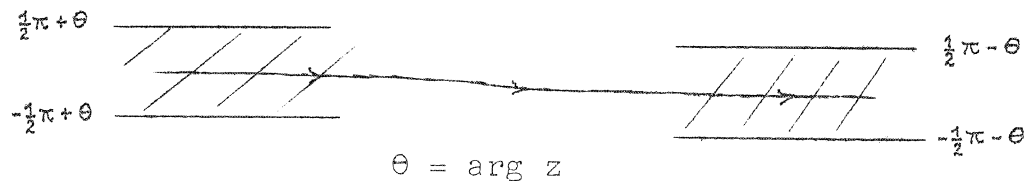
In de moderne literatuur komen de zogenaamde "modified Bessel functions" veel voor. Ze zijn gedefinieerd als

$$(16) \quad I_{\nu}(z) = i^{-\nu} J_{\nu}(iz)$$

$$(17) \quad K_{\nu}(z) = \frac{1}{2} \pi i e^{\frac{1}{2} \nu \pi i} H_{\nu}^{(1)}(iz) .$$

M.b.v. (3) volgt de belangrijke voorstelling

$$(18) \quad K_{\nu}(z) = \frac{1}{2} \int_L e^{-z \operatorname{ch} w + \nu w} dw$$



Uit (6) volgt

$$(19) \quad K_{-\nu}(z) = K_{\nu}(z) .$$

De reeksvoorstellingen volgen gemakkelijk uit de boven gegevene

$$(20) \quad I_{\nu}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j! (j+\nu)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2j} .$$

$$(21) \quad \sin \nu \pi K_{\nu}(z) = \frac{1}{2} \pi \left\{ -I_{\nu}(z) + I_{-\nu}(z) \right\} .$$

$$(22) \quad K_0(z) = -\ln \frac{z}{2} \cdot I_0(z) + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\psi(j+1)}{j! j!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2j} .$$

$$(23) \quad I_0(z) = 1 + \frac{z^2}{4} + \frac{z^4}{64} + \dots$$

$$(24) \quad K_0(z) = -(\ln \frac{z}{2} + \gamma) + O(z^2 \ln z) .$$

$$(25) \quad I_1(z) = \frac{z}{2} + \frac{z^3}{16} + \dots = I'_0(z) \quad .$$

$$(26) \quad K_1(z) = \frac{1}{2} + O(z \ln z) = -K'_0(z) \quad .$$

Het asymptotische gedrag is a.v.

$$(27) \quad K_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \quad .$$

Voor  $z \rightarrow \infty$ ,  $|\arg z| < \pi$ ,

en

$$(28) \quad I_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{1}{2\pi z}} e^z$$

voor  $z \rightarrow \infty$ ,  $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$ .

Voorts geldt

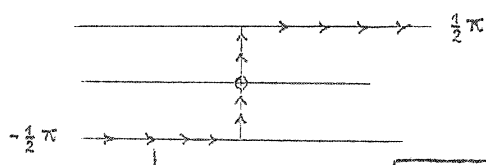
$$(29) \quad \begin{cases} K_0(iz) = -\frac{1}{2}\pi \left\{ Y_0(z) + i J_0(z) \right\} \\ K_0(-iz) = -\frac{1}{2}\pi \left\{ Y_0(z) - i J_0(z) \right\} \end{cases}$$

$$(30) \quad I_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sinh z, \quad K_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \quad .$$

Berekening van

$$f = \frac{1}{2} \int_L e^{-a \operatorname{ch} w - b \operatorname{sh} w} dw$$

voor  $a > 0$ ,  $b$  reëel.



Als  $a > |b|$  stellen we  $a = \sqrt{a^2 - b^2} \operatorname{ch} \gamma$   
 $b = \sqrt{a^2 - b^2} \operatorname{sh} \gamma$

zodat

$$f = \frac{1}{2} \int_L e^{-\sqrt{a^2 - b^2} \operatorname{ch}(w + \gamma)} dw = \frac{1}{2} \int_L e^{-\sqrt{a^2 - b^2} \operatorname{ch} w} dw = K_0(\sqrt{a^2 - b^2}) \quad .$$

Als  $b > a$  stellen we  $a = i \sqrt{b^2 - a^2} \operatorname{ch}(\gamma - \frac{1}{2}\pi i)$   
 $b = i \sqrt{b^2 - a^2} \operatorname{sh}(\gamma - \frac{1}{2}\pi i)$

zodat

$$f = \frac{1}{2} \int_L e^{-i \sqrt{b^2 - a^2}} \operatorname{ch}(w + \gamma - \frac{1}{2} \pi i) dw = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i \sqrt{b^2 - a^2}} \operatorname{ch} w dw = K_0(i \sqrt{b^2 - a^2}).$$

Als  $b < -a$  stellen we

$$a = -i \sqrt{b^2 - a^2} \operatorname{ch}(\gamma + \frac{1}{2} \pi i)$$

$$b = -i \sqrt{b^2 - a^2} \operatorname{sh}(\gamma + \frac{1}{2} \pi i)$$

zodat analoog

$$f = K_0(-i \sqrt{b^2 - a^2})$$

Totaal

$$f = K_0(-i \sqrt{b^2 - a^2}) \theta(-b-a) + K_0(\sqrt{a^2 - b^2}) \{ \theta(b+a) - \theta(b-a) \} + K_0(i \sqrt{b^2 - a^2}) \theta(b-a)$$

Voor  $b^2 \approx a^2$  is i.h.b.

$$f \approx -\frac{1}{2} \ln |a^2 - b^2| + \frac{1}{2} \pi i \{ \theta(-b-a) + \theta(b-a) \}$$

Oplossing van

$$(1) \quad (\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - m^2) f = -4\pi \delta(x_1, x_2, x_3, t)$$

F-transformatie naar  $t$  geeft

$$(2) \quad \tilde{f}(\vec{x}, z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izt} f(\vec{x}, t) dt$$

$$(3) \quad (\Delta - (m^2 - z^2)) \tilde{f} = -4\pi \delta(x_1, x_2, x_3).$$

Wetende dat voor  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

$$(4) \quad \Delta \frac{1}{r} = -4\pi \delta(x_1, x_2, x_3)$$

verifieert men gemakkelijk dat (3) de volgende oplossing heeft

$$(5) \quad \tilde{f} = r^{-1} \exp - r \sqrt{m^2 - z^2}$$

met een zekere keuze voor de wortel.

A)  $m=0$

Men heeft de twee oplossingen

$$(6) \quad \tilde{f}_0 = \frac{1}{r} \exp \pm i r z$$

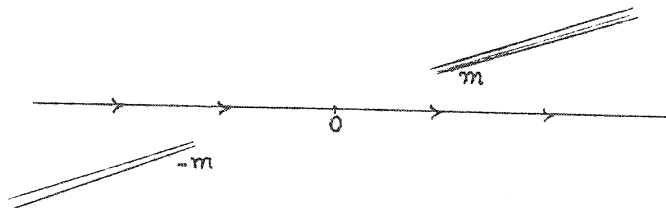
Voor (1) krijgen we dus o.a. de volgende oplossingen - welke onderling in een oplossing van de homogene vergelijking verschillen -

$$(7) \quad \begin{cases} r^{-1} \exp i r z \doteq \mathcal{J}(t-r) / r \\ r^{-1} \exp -i r z \doteq \mathcal{J}(t+r) / r \\ r^{-1} \cos r z \doteq \frac{1}{2} \{ \mathcal{J}(t-r) + \mathcal{J}(t+r) \} / r \end{cases}$$

Oplossingen van de homogene vergelijking zijn bijv.

$$(8) \quad \begin{cases} r^{-1} \sin r z \doteq \frac{1}{2i} \{ \mathcal{J}(t-r) - \mathcal{J}(t+r) \} / r \\ r^{-1} \sin r z \doteq -\frac{1}{\pi} \frac{1}{t^2 - r^2} \end{cases}$$

$$B) \quad m = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (\mu + i \varepsilon) , \quad \mu > 0$$



De eis dat  $f \rightarrow 0$  voor  $r \rightarrow \infty$  en  $|t| \rightarrow \infty$  betekent dat  $\tilde{f}$  als functie van complexe  $z$  holomorf is in de strook  $|\operatorname{Im} z| < \varepsilon$  en dat voor reële  $z$

$$\sqrt{m^2 - z^2} = \sqrt{\mu^2 - z^2} + \frac{i \varepsilon \mu}{\sqrt{\mu^2 - z^2}} + o(\varepsilon^2) \text{ voor } |z| < \mu$$

$$\sqrt{m^2 - z^2} = \frac{\varepsilon \mu}{\sqrt{z^2 - \mu^2}} + i \sqrt{z^2 - \mu^2} + o(\varepsilon^2) \text{ voor } |z| > \mu$$

met de eenduidige oplossing (5).

Voor  $z \rightarrow \pm \infty$  betekent dit dus  $\arg \sqrt{m^2 - z^2} \rightarrow \frac{1}{2} \pi$ .

Voer nu de transformatie

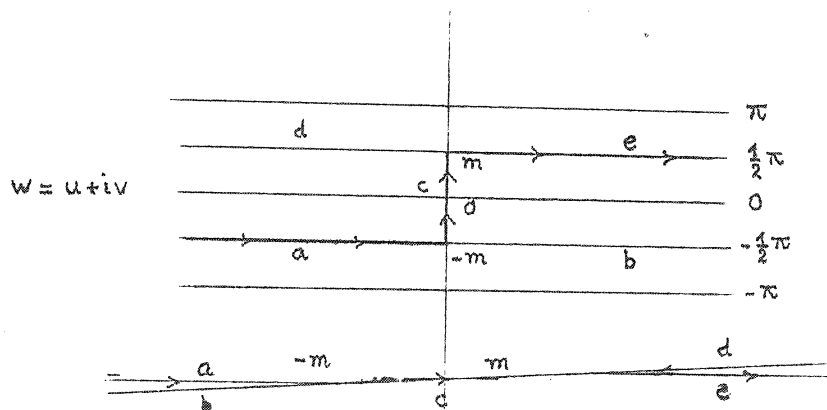
$$z = x + iy, \quad z = -i m \operatorname{sh} w, \quad w = u + iv$$

uit. Dan is

$$x = \mu \operatorname{ch} u \sin v + \varepsilon \operatorname{sh} u \cos v$$

$$y = -\mu \operatorname{sh} u \cos v + \varepsilon \operatorname{ch} u \sin v$$

$$\sqrt{m^2 - z^2} = m \operatorname{ch} w = (\mu \operatorname{ch} u \cos v - \varepsilon \operatorname{sh} u \sin v) + i(\mu \operatorname{sh} u \sin v + \varepsilon \operatorname{ch} u \cos v).$$



De inverse van (5) is

$$\begin{aligned} f(\vec{x}, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itz} \check{f}(\vec{x}, z) dz = \frac{im}{2\pi r} \int e^{-m(r \operatorname{ch} w + t \operatorname{sh} w)} dw = \\ &= \frac{1}{2\pi ri} \frac{\partial}{\partial r} \int \exp - m (r \operatorname{ch} w + t \operatorname{sh} w) dw. \end{aligned}$$

Dus

$$\begin{aligned} f(\vec{x}, t) &= \frac{1}{\pi ri} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ K_0(-im \sqrt{t^2 - r^2}) \Theta(-t-r) + \right. \\ (9) \quad &+ K_0(m \sqrt{r^2 - t^2}) \{ \Theta(t+r) - \Theta(t-r) \} \\ &+ K_0(im \sqrt{t^2 - r^2}) \Theta(t-r) \} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (10) \quad &= \frac{1}{2} \left\{ \delta(t+r) + \delta(t-r) \right\} /r + \frac{m}{\pi} \left\{ \frac{-K_1(-im\sqrt{t^2-r^2})}{\sqrt{t^2-r^2}} \theta(-t-r) + \right. \\
 &+ \left. \frac{iK_1(m\sqrt{r^2-t^2})}{\sqrt{r^2-t^2}} \left\{ \theta(t+r) - \theta(t-r) \right\} + \frac{K_1(im\sqrt{t^2-r^2})}{\sqrt{t^2-r^2}} \theta(t-r) \right\} .
 \end{aligned}$$

We merken op dat voor  $m \rightarrow 0$

$$(11) \quad f_o(\vec{x}, t) = \frac{1}{2} \left\{ \delta(t+r) + \delta(t-r) \right\} /r + \frac{1}{\pi i} \frac{1}{t^2 - r^2} ,$$

in overeenstemming met (7) en (8).